



0017-9310(94)00233-9

Etude numérique et expérimentale des transferts de matière et de quantité de mouvement dans un écoulement annulaire laminaire non établi

M. OULD-ROUIS et A. SALEM

Laboratoire de Mécanique des Fluides, Institut de Physique, USTHB, El Alia, B.P. 41, Bab Ezzouar, Alger, Algérie

J. LEGRAND†

Laboratoire de Génie des Procédés, I.U.T. de Saint-Nazaire, B.P. 420, 44606 Saint-Nazaire Cedex, France

et

C. NOUAR

LEMTA, URA CNRS, No. 875, 2 avenue de la Forêt du Haye, Zac de Brabois, B.P. 160, 54504 Vandoeuvre Cedex, France

(Reçu 12 novembre 1993 et sous forme finale 20 juillet 1994)

Abstract—Les caractéristiques hydrodynamiques et du transfert de matière ont été déterminées dans la région d'entrée d'un espace annulaire cylindrique dans le cas d'un développement simultané des champs de vitesse et de concentration. La résolution numérique du problème a été faite par la méthode des différences finies en utilisant les hypothèses de la couche limite. Deux types de conditions aux limites ont été considérés à l'entrée de l'espace annulaire: vitesse axiale uniforme et vitesse axiale correspondant à celle en sortie d'un milieu poreux, de manière à obéir aux conditions expérimentales. Les profils de vitesse ont été déterminés par vélocimétrie laser à différentes distances de l'entrée et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Les gradients pariétaux de vitesse et les coefficients locaux de transfert de matière ont été obtenus sur des microélectrodes en mettant en oeuvre une méthode polarographique. Les prédictions numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

INTRODUCTION

L'étude du développement simultané des couches limites hydrodynamique et diffusionnelle dans les espaces annulaires est importante pour le dimensionnement et l'optimisation des performances des échangeurs de matière ou de chaleur et des réacteurs chimiques ou électrochimiques, dans lesquels la zone d'échange ou la zone réactionnelle débute dès l'entrée du fluide dans l'espace annulaire. Le problème du transfert de matière en régime laminaire établi a été relativement étudié [1-4]. Le développement simultané des couches limites hydrodynamique et thermique a fait l'objet de nombreux travaux, particulièrement dans les tubes par suite de l'intérêt industriel des échangeurs de chaleur. Le comportement hydrodynamique du fluide dans la zone non établie d'un espace annulaire a été étudié théoriquement [5-8]. Dans tous les travaux, théoriques ou numériques, le profil de vitesse axiale à l'entrée de l'espace annulaire est considéré uniforme.

Peu d'études ont été consacrées à l'analyse expérimentale du transfert de matière en régime laminaire non établi. Pickett [9] et Qi et Savinell [10] ont étudié le transfert de matière dans des cellules électrochimiques constituées par des plaques planes en écoulement laminaire non établi. Molki *et al.* [11] ont déterminé le transfert de matière dans la région d'entrée d'un espace annulaire cylindrique en utilisant la technique de sublimation du naphthalène. Dans un précédent article [12], nous avons analysé numériquement l'influence des conditions initiales sur l'évolution des coefficients de transfert de matière dans la région d'entrée d'un espace annulaire.

Dans le cadre du présent travail, nous avons déterminé expérimentalement l'hydrodynamique, en utilisant la vélocimétrie laser, de l'écoulement laminaire dans la région d'entrée d'un espace annulaire cylindrique ainsi que les coefficients locaux de transfert de matière et de quantité de mouvement sur les parois interne et externe de la conduite annulaire, en mettant en oeuvre une méthode électrochimique. Les résultats expérimentaux sont comparés aux prédictions numériques. Les équations du mouvement, écrites

†La correspondance relative à cet article est à adresser à J. Legrand.

NOMENCLATURE

<i>A</i>	surface des microélectrodes	$\frac{Sh}{Sh}$	nombre de Sherwood local, $k_d d_h/D$
<i>c</i>	concentration locale de l'ion actif	U	vitesse axiale adimensionnelle, u/u_0
c_0	concentration initiale de l'ion actif	<i>u</i>	vitesse axiale
<i>C</i>	concentration adimensionnelle, c/c_0	u_0	vitesse axiale à l'entrée
<i>D</i>	coefficient de diffusion de l'ion actif	U^*	vitesse à la sortie d'un milieu poreux [equation (10)]
<i>d</i>	diamètre des microélectrodes	<i>V</i>	vitesse radiale adimensionnelle, vr_2/ν
d_h	diamètre hydraulique, $2(r_2 - r_1)$	<i>v</i>	vitesse radiale
I_d	courant recueilli en paroi conductrice	<i>Z</i>	longueur axiale adimensionnelle, $2z(1-N)/(Re r_2)$
I_f	courant recueilli en paroi inerte	<i>z</i>	cote axiale
<i>K</i>	coefficient de transfert de matière adimensionnel, $(r_2/D)k_d$	z_0	cote axiale correspondant au début de la zone de transfert
k_d	coefficient de transfert de matière	z_D	longueur d'entrée diffusionnelle
<i>N</i>	rapport des rayons, r_1/r_2	z_c	longueur d'entrée hydrodynamique.
<i>p</i>	pression		
p_0	pression à l'entrée		
<i>P</i>	pression adimensionnelle, $(p - p_0)/\rho u_0^2$		
<i>R</i>	rayon adimensionnel, r/r_2		
<i>r</i>	rayon		
<i>Re</i>	nombre de Reynolds, $U_0 d_h/\nu$		
r_m	position de la vitesse maximale		
r_1	rayon du cylindre intérieur		
r_2	rayon intérieur du cylindre extérieur		
<i>S</i>	gradient pariétal de vitesse adimensionnel, $(r_2/u_0)s$		
<i>s</i>	gradient pariétal de vitesse		
<i>Sc</i>	nombre de Schmidt, ν/D		

Symboles grecs
ν viscosité cinématique
ρ masse volumique.

Indices
 1 cylindre intérieur
 2 cylindre extérieur
 p canal.

avec les hypothèses de la couche limite, sont résolues avec une méthode de différences finies.

ANALYSE NUMERIQUE

Nous étudions l'écoulement axisymétrique d'un fluide newtonien incompressible. Nous supposons l'écoulement permanent ($\partial/\partial t = 0$), à propriétés physiques constantes, à dissipation visqueuse négligeable et sans génération interne de chaleur (ou de matière). Le terme de diffusion axiale ($\partial^2 c/\partial z^2$) de la concentration est négligé comparé à celui de la diffusion radiale. Aussi, compte tenu des hypothèses classiques simplificatrices de la couche limite, les lois de conservation de la quantité de mouvement, de la masse, ainsi que l'équation de diffusion-convection et l'équation intégrale de la conservation du débit s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial}{\partial z} (ru) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} u \frac{\partial c}{\partial z} + v \frac{\partial c}{\partial r} &= D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} 2\Pi u r dr &= \Pi u_0 (r_2^2 - r_1^2) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

où *u* et *v* sont respectivement les vitesses axiale et radiale, *r* et *z* les coordonnées radiale et axiale, *c* la concentration, r_1 et r_2 les rayons des cylindres intérieur et extérieur.

En prenant les variables réduites suivantes :

$$\begin{aligned} U &= \frac{u}{u_0} & V &= vr_2/\nu & P &= (p - p_0)/\rho u_0^2 \\ C &= \frac{c}{c_0} & Z &= \frac{2z(1-N)}{r_2 Re} & R &= r/r_2. \end{aligned}$$

Les équations (1)–(4) prennent la forme adimensionnelle :

$$\left\{ \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial Z} + V \frac{\partial U}{\partial R} &= -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} U \frac{\partial C}{\partial Z} + V \frac{\partial C}{\partial R} &= \frac{1}{Sc} \left\{ \frac{\partial^2 C}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial C}{\partial R} \right\} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_N^1 RU dR &= (1 - N^2)/2 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Les conditions aux limites associées pour le problème hydrodynamique sont :

$$\left\{ \begin{aligned} U = 0 & \quad V = 0 & \text{pour } R = 1 \text{ ou } R = N \text{ et } Z \geq 0 \\ U = \begin{cases} 1 \\ U^* \end{cases} & \quad V = 0 & \text{pour } N < R < 1 \text{ et } Z = 0 \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Nous utilisons deux conditions d'entrée ($Z = 0$), l'une uniforme ($U = 1$), l'autre non uniforme ($U = U^*$). Tous les travaux qui ont traité du problème de l'écoulement laminaire dans un espace annulaire (ou cylindrique), ont supposé un profil de vitesse uniforme à l'entrée de la conduite. Dans notre dispositif expérimental, cette hypothèse n'est pas réalisée. La distribution de vitesse, à la sortie d'un milieu poreux, n'est pas uniforme [13, 14]. Dans le cas d'une conduite annulaire, Chang et Hsu [15] ont établi une expression analytique de la distribution de vitesse, dans le milieu poreux et à sa sortie, en tenant compte des effets de parois :

$$\begin{aligned}
 U^* = \alpha \left\{ 1 + C_2 \left[\exp \left[-\frac{N_2}{\gamma} (R/N - 1) \right] \right. \right. \\
 \left. \left. + \exp \left[-\frac{N_2}{\gamma N} (1 - R) \right] \right] \right. \\
 \left. - \frac{(1 + C_2)}{\sqrt{R/N}} \left[\exp \left[-\frac{(R/N - 1)\sqrt{C_1}}{\sigma\sqrt{1 + C_2}} \right] \right. \right. \\
 \left. \left. + N^{1/2} \exp \left[-\frac{(1 - R)\sqrt{C_1}}{N\sigma\sqrt{1 + C_2}} \right] \right] \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (1 - N^2)/(2N^2\beta) \\
 \beta &= (1 - N^2)/(2N^2) + \frac{C_2\gamma}{NN_2} (N + 1) \\
 &\times \left[1 - \exp \left[-\frac{N_2}{\gamma N} (1 - N) \right] \right] - (1 + C_2)(I_1 + I_2) \\
 \gamma &= dp/r_1 \\
 I_1 &= \int_N^1 \sqrt{R/N} \exp \left[\frac{(R/N - 1)\sqrt{C_1}}{\sigma\sqrt{1 + C_2}} \right] dR \\
 I_2 &= \sqrt{1/N} \int_N^1 \sqrt{R/N} \exp \left[\frac{(1 - R)\sqrt{C_1}}{\sigma N\sqrt{1 + C_2}} \right] dR
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 2 \\
 C_2 &= 20 \\
 N_2 &= 4 \\
 \sigma &= 5.44 \times 10^{-2} \gamma.
 \end{aligned}$$

La dissymétrie du profil initial de vitesse s'accroît avec la décroissance du rapport de rayons N et avec la croissance de γ . Nous avons déterminé le champ hydrodynamique et le transfert de matière dans la zone d'entrée de l'espace annulaire, pour chacune des conditions initiales (uniforme et non-uniforme).

En ce qui concerne les conditions aux limites du problème diffusionnel, nous avons tenu compte des deux cas possibles. Le fluide qui traverse l'espace annulaire possède à l'entrée une concentration C_0 en ions. Les parois de la conduite constituent les élec-

trodes. Au niveau de l'électrode activée, à partir d'un certain potentiel, la concentration des ions est nulle (limitation diffusionnelle). Au voisinage de l'autre paroi (inerte), la concentration des ions est égale à celle au sein de l'écoulement C_0 . Ainsi, suivant la nature de la paroi activée, on a deux types de conditions aux limites :

cylindre interne activé :

$$\begin{cases} C = 0, R = N, Z > 0 \\ C = 1, R = 1, Z \geq 0 \\ C = 1, N \leq R < 1, Z = 0 \end{cases}$$

cylindre externe activée :

$$\begin{cases} C = 0, R = 1, Z > 0 \\ C = 1, R = N, Z \geq 0 \\ C = 1, N < R \leq 1, Z = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Méthode de résolution

Les équations (5)–(8) sont approchées par un schéma implicite aux différences-finies, analogue à celui adapté par El-Shaarawi et Sarhan [16]. La stabilité et la consistance de ce schéma ont été étudiées par ces auteurs.

Le système d'équations aux différences finies peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} E\hat{U} + P\hat{V} = \hat{H} \\ \hat{G}\hat{U} + P\hat{B} = D_n \end{cases} \quad (12)$$

où E est une matrice tridiagonale connue, \hat{B} , \hat{V} , \hat{H} et \hat{G} des vecteurs connus et D_n est une constante. \hat{U} est le vecteur vitesse inconnu et P la pression inconnue.

Nous débutons par la section d'entrée ($Z = 0$, $j = 1$) où U et P sont définis, ainsi que V et C . Puis nous déterminons ces mêmes quantités à la cote suivante :

$$\hat{U} = E^{-1} \hat{H} - PE^{-1} \hat{V} \quad (13)$$

$$P = \frac{\hat{G}E^{-1} \hat{H} - D_n}{\hat{G}E^{-1} \hat{V} - \hat{B}} \quad (14)$$

\hat{U} est calculée à l'aide de l'algorithme de Thomas, et permet alors de déduire les valeurs de la vitesse radiale V et le profil de concentration. Le processus itératif est répété à chacune des cotes suivantes. Il est stoppé lorsque le régime établi est atteint, où $U = U_\infty$, qui correspond au profil de Poiseuille. Les pas, correspondant à un schéma stable, sont respectivement $\Delta R = 10^{-4}$ pour le pas radial et $\Delta Z = 10^{-4}$ pour le pas axial.

Nous avons reporté sur la Fig. 1 les résultats numériques concernant le transfert de matière local sur le cylindre intérieur. Lorsque la vitesse radiale est différente de zéro, c'est-à-dire que l'on résoud entièrement l'équation (7), on remarque [Fig. 1(a)] que les coefficients de transfert sont beaucoup plus faibles que ceux déterminés en régime établi [4], ce qui est en désaccord avec les résultats expérimentaux obtenus par ailleurs [9, 10]. Par contre, en égalant à zéro la

vitesse radiale, on obtient une évolution du transfert de matière a priori plus satisfaisante [Fig. 1(a)]. Pour $Sc = 1$ [Fig. 1(b)], valeur qui correspond approximativement à celle du nombre de Prandtl utilisé en transfert de chaleur, la différence entre les résultats numériques calculés avec $V = 0$ et $V \neq 0$ est faible et pour ces deux conditions on obtient des coefficients de transfert supérieurs à ceux obtenus en régime établi. Ce résultat a déjà été mis en évidence par Coney et El-Shaarawi [17].

Dans le cas des valeurs élevées du nombre de Schmidt, la diminution importante du transfert de matière est due à l'influence excessive de la vitesse radiale [18]. Il semblerait qu'il soit nécessaire d'ajouter le terme de diffusion axiale dans l'équation (7). Compte-tenu des résultats rapportés sur la Fig. 1(a), nous utiliserons la résolution numérique en considérant la vitesse radiale nulle pour la comparaison avec les résultats expérimentaux concernant les coefficients de transfert de matière.

DESCRIPTION DES MOYENS DE MESURE

Nous avons mis en oeuvre deux types de mesure. Dans la première, les coefficients de transfert locaux de quantité de mouvement et de matière sont déterminés à l'aide d'une méthode électrochimique. Dans la seconde, les profils de vitesses axiales sont obtenus par vélocimétrie laser.

Méthode électrochimique

Montage expérimental. L'installation (Fig. 2) permet la circulation d'un électrolyte en boucle fermée. La cellule d'étude est alimentée par un réservoir de 8 l en PVC qui sert aussi de bac de récupération. La pompe aspire le fluide vers un système de deux débitmètres munis à leur entrée et sortie de vannes de réglage de débit. Le fluide est acheminé vers la veine de mesure en passant par une chambre tranquillisante (Fig. 3). Enfin, il quitte la cellule par l'intermédiaire d'une sortie tangentielle. La chambre tranquillisante (Fig. 3) est constituée par un espace cylindrique de 55 mm de haut avec un cylindre extérieur de diamètre intérieur 50 mm et un cylindre intérieur de diamètre extérieur 36 mm, soit un rapport de rayons $N = r_1/r_2 = 0.72$. L'espace annulaire de cette chambre renferme un lit de billes sphériques de 2 mm de diamètre, de manière à répartir le débit uniformément.

La veine de mesure est composée de deux cylindres coaxiaux de longueur 50 cm (Fig. 3). Le cylindre externe en Altuglas, de diamètre intérieur 50 mm, porte 24 microsondes circulaires en nickel, de 0.4 mm de diamètre, disposées le long d'une génératrice, sur la surface interne. Une électrode en platine sert d'électrode de référence dans le circuit potentiostatique. Le cylindre interne est un tube en nickel de diamètre externe 36 mm. Il est divisé en quatre parties séparées par des jonctions isolantes d'épaisseur 10 mm. L'anode est un tube en nickel de 10 cm de long. Un tube similaire, servant de cathode, porte quinze micro-élec-

trodes constituées par la section droite d'un fil de nickel de 0.4 mm de diamètre. L'ensemble des micro-électrodes est relié aux appareils de mesure et d'alimentation. Un échangeur de chaleur, faisant circuler l'eau de robinet, est plongé dans le réservoir ainsi qu'une résistance chauffante et un thermomètre. Ces deux derniers sont reliés à un régulateur de température. Celle-ci reste fixée à 30°C, durant toute l'expérience. Un barbotage d'azote est effectué dans la solution, avant chaque expérience.

Description du fluide utilisé. L'électrolyte employé, pour la mise en oeuvre de la méthode électrochimique, est une solution contenant de la soude (0.5 mol l^{-1}), du ferricyanure de potassium ($2 \times 10^{-3} \text{ mol l}^{-1}$), du ferrocyanure de potassium ($5 \times 10^{-2} \text{ mol l}^{-1}$) et de l'eau déminéralisée. Les propriétés du fluide ont été déterminées à 30°C: la viscosité cinématique ν est égale à $8.725 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, le coefficient de diffusion de l'ion ferricyanure D à $6.95 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, d'où un nombre de Schmidt Sc égale à 1255.

Appareils de mesure. La chaîne électrique de mesure du courant limite de diffusion est constituée principalement d'un générateur de tension variable (de $\pm 2 \text{ V}$); un potentiostat relié au générateur et un convertisseur courant-tension d'impédance d'entrée 1 M Ω . Ce dernier convertit, en tension, le courant détecté au niveau de chaque microsonde avec un gain de 10^6 . Deux types de mesure peuvent être effectuées [19] suivant le potentiel respectif de la microélectrode sur laquelle on mesure le courant limite de diffusion, et de la surface qui l'entoure. Lorsque la microsonde est insérée dans une paroi inerte, le courant limite, I_F , conduit au coefficient de transfert local qui est relié [20] dans le cas d'une microélectrode circulaire au gradient pariétal de vitesse, s :

$$k_F = \frac{I_F}{nFAC_0} = 0.862 \left(\frac{Ds}{d} \right)^{1/3}. \quad (15)$$

n , F , A et C_0 sont respectivement le nombre d'électrons mis en jeu (ici $n = 1$), le nombre de Faraday, la surface de la sonde, et la concentration de l'ion qui diffuse. Lorsque la microélectrode est insérée dans une cathode et qu'elle est portée au même potentiel que la surface qui l'entoure, le courant limite de diffusion, I_d , conduit au coefficient de transfert local de matière:

$$k_d = \frac{I_d}{nFAC_0}. \quad (16)$$

La précision des mesures obtenues avec cette méthode est environ égale à 5%, compte tenu de l'incertitude sur la détermination de la surface active des micro-électrodes.

Méthode vélocimétrique

Description de la méthode. L'anémométrie laser à effet Doppler a permis de relever les vitesses locales dans l'écoulement annulaire. Le circuit hydraulique fermé est décrit sur la Fig. 2. L'eau déminéralisée utilisée contient suffisamment de matière en sus-

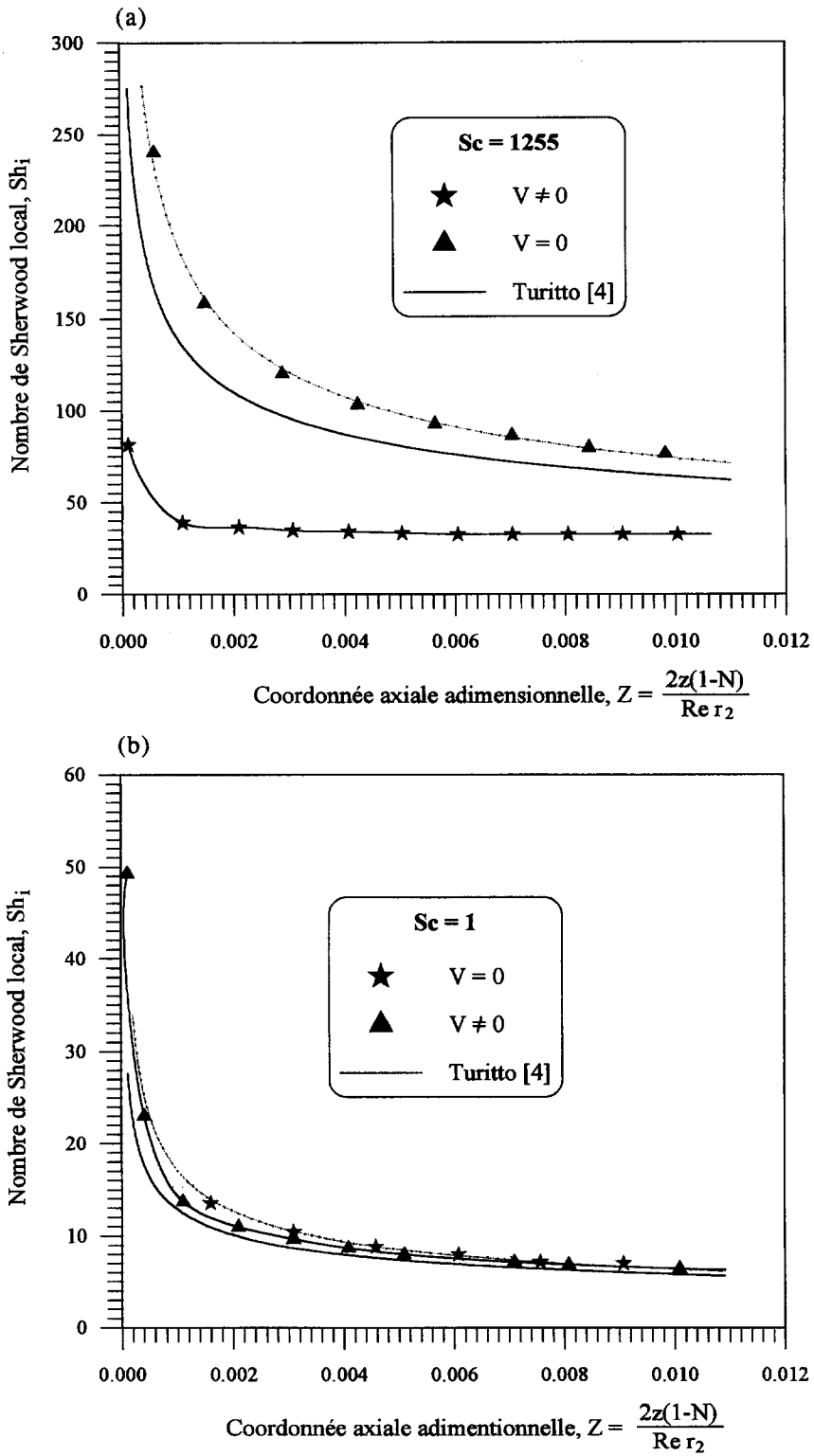


Fig. 1. Influence de la vitesse radiale [calculée à partir de l'équation (6)] sur la détermination numérique du transfert de matière : (a) $Sc = 1250$, (b) $Sc = 1$.

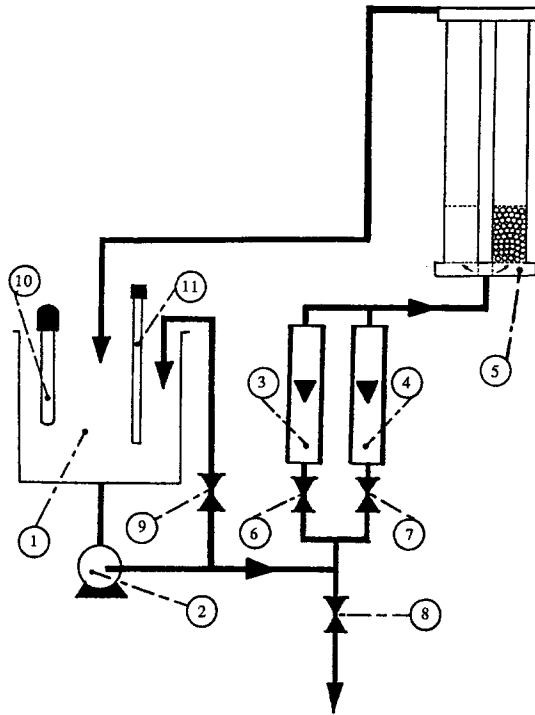


Fig. 2. Schéma du circuit hydraulique: (1) réservoir de stockage, (2) pompe centrifuge, (3 et 4) débitmètres, (5) cellule de mesure, (6 et 7) vannes de réglage, (8) vanne de vidange, (9) by-pass, (10) résistance chauffante, et (11) thermomètre à contact.

pension pour permettre la mise en oeuvre de la vélocimétrie. La veine d'étude mesure 50 cm et est analogue à celle du précédent montage; le rapport de rayons $N = 0.72$. La chambre tranquillisante est un espace annulaire de 12 cm de long, emprisonnant un lit de billes sphériques en verre, de 2 mm de diamètre.

Appareils de mesure. Pour étudier l'écoulement, nous avons choisi le mode Doppler différentiel. Ce mode fournit le meilleur rapport signal sur bruit lorsque l'ensemencement du fluide est faible (cas de l'eau déminéralisée). Le vélocimètre bidimensionnel utilisé (Spectra-Physics 164/165 Ar-ion 5 W) se compose essentiellement d'une source lumineuse à argon qui émet simultanément sur deux longueurs d'onde $\lambda_N = 514.5$ nm et $\lambda_o = 488$ nm). On trouve ensuite le dispositif optique d'émission, la cellule de Bragg, une unité de décalage de fréquence (40 MHz) et un dispositif optique de réception c'est-à-dire deux photomultiplicateurs précédés chacun d'un filtre interférentiel, l'un bleu, l'autre vert. La mesure de la fréquence Doppler permet de déduire la vitesse locale de l'écoulement. Pour chaque mesure, l'information est validée dès que la qualité du signal délivré par l'oscilloscope, le taux de pourcentage affiché par le compteur, ainsi que l'intensité du bruit respectent les limites de précision requises. Les vitesses sont déterminées avec une précision de l'ordre de 5%, qui correspond à la reproductibilité des résultats obtenus.

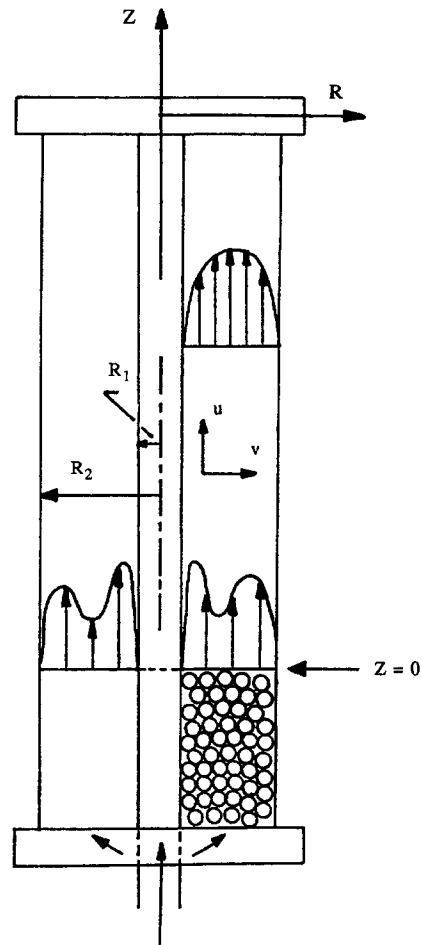


Fig. 3. Schéma de la cellule de mesure.

RESULTATS—COMPARAISON EXPERIENCE ET ANALYSE NUMERIQUE

Profil de vitesse initial

Nous avons relevé l'évolution expérimentale du profil de vitesse à l'entrée de la conduite annulaire ($N = 0.72$). La variation radiale de porosité au niveau des parois, entraîne l'apparition d'un maximum de vitesse. Ces extremums sont d'autant plus accentués que le débit augmente (Fig. 4). Sur cette figure, sont reportées les lignes continues représentant le profil de vitesse dissymétrique fourni par l'expression (10) et utilisée comme condition d'entrée dans l'étude numérique aux différences-fines. Les résultats expérimentaux sont en accord avec ceux prédits par l'étude numérique. Les extremums se rapprochent des parois lorsque le nombre de Reynolds augmente et le profil de vitesse apparaît alors, en moyenne, plus uniforme.

Profil de vitesse axiale

La Fig. 5 représente l'évolution du profil de vitesse axiale, dans la zone d'entrée de la veine ($N = 0.72$) pour différentes positions axiales. Lorsque le nombre de Reynolds est fixé, l'intensité des survitesses au voisinage des parois diminue quand la coordonnée axiale

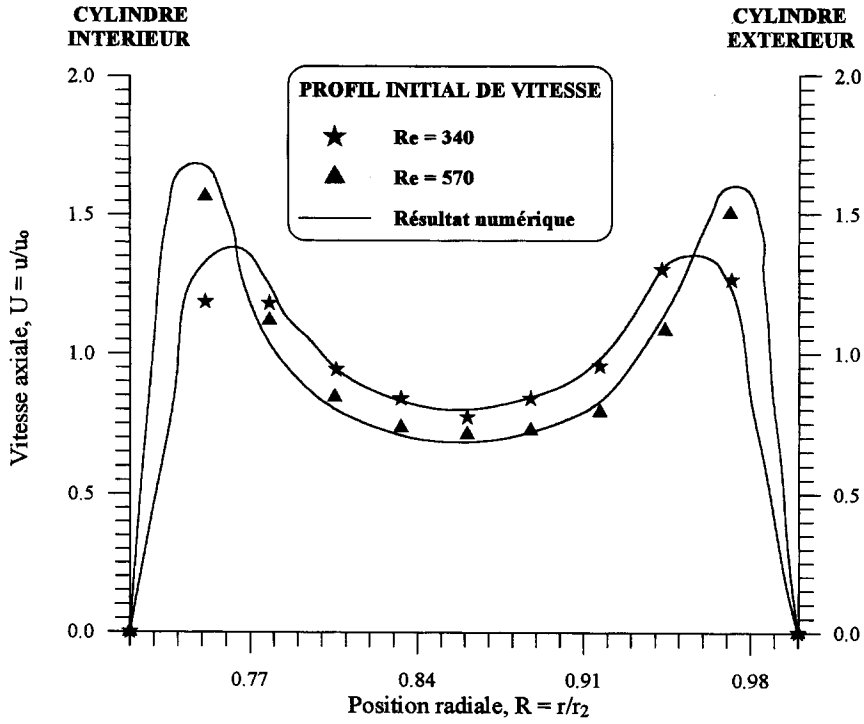


Fig. 4. Profil de vitesse axiale à la sortie d'un lit de sphères, d'après ref. [15].

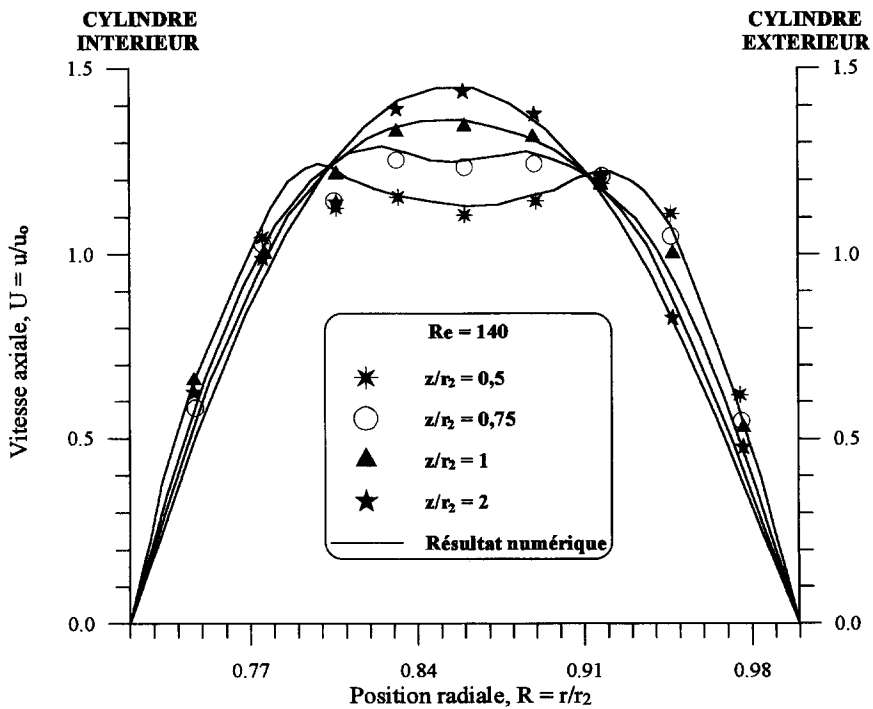


Fig. 5. Evolution de la distribution de vitesse axiale en fonction de la distance par rapport à l'entrée.

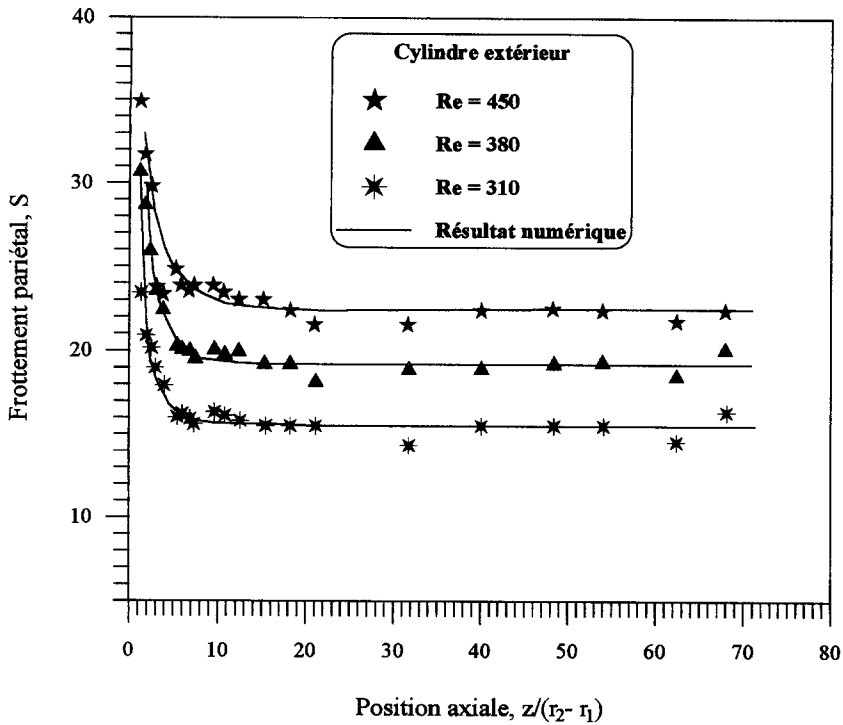


Fig. 6. Détermination du coefficient de frottement sur le cylindre extérieur.

z augmente et les pics disparaissent complètement près de la zone de régime hydrodynamique établi. Le profil de vitesse s'identifie alors à celui de Poiseuille et présente bien une dissymétrie: l'extremum de ce profil se situe à la position radiale $r_m = 4.5$ cm, ce qui se rapproche du résultat théorique:

$$r_m = r_2 \left[\frac{N^2 - 1}{2 \ln N} \right]^{1/2} \tag{17}$$

soit $r_m = 4.45$ cm. La Fig. 5 montre que les résultats expérimentaux s'accordent avec ceux de l'analyse numérique dans le cas d'une condition d'entrée uniforme.

Coefficient de frottement pariétal

Les valeurs expérimentales du gradient pariétal de vitesse, S , sont comparées à celles obtenues numériquement pour différents nombres de Reynolds (Fig. 6).

Dès l'entrée dans la conduite, le frottement local décroît rapidement le long de l'espace annulaire, et atteint une valeur constante lorsque le régime est établi.

Sur chacune des parois interne et externe, et pour une position axiale donnée, le coefficient de frottement local croît avec le débit. Le frottement est d'autre part plus important au niveau de la paroi interne (Fig. 7). Le gradient pariétal de vitesse est fonction de la coordonnée axiale. La décroissance du gradient pariétal est d'autant plus rapide que la cote axiale est faible. Des corrélations donnant le gradient pariétal

adimensionnel, S , en fonction de Z ont été établies dans différents domaines de l'espace annulaire. Les corrélations sont comparées aux résultats de Rostami et Mortazavi [21] établis dans le cas d'un écoulement entre deux plaques parallèles. Dans les équations (18)–(20), S_1 , S_2 et S_p sont respectivement les frottements locaux calculés sur le cylindre interne, sur le cylindre externe et dans un canal:

$$10^{-4} \leq Z \leq 7.5 \times 10^{-4},$$

$$S_1 = 2.7Z^{-0.32} \quad S_2 = 1.35Z^{-0.40}$$

$$S_p = 2.42Z^{-0.32}, \text{ d'après réf. [21]} \tag{18}$$

$$7.5 \times 10^{-4} \leq Z \leq 25 \times 10^{-4},$$

$$S_1 = 9.10Z^{-0.15} \quad S_2 = 8.76Z^{-0.14}$$

$$S_p = 8.75Z^{-0.14}, \text{ d'après réf. [21]} \tag{19}$$

$$Z \geq 25 \times 10^{-4},$$

$$S_1 = 22.08 \quad S_2 = 20.25$$

$$S_p = 19.84, \text{ d'après réf. [21].} \tag{20}$$

Nos prédictions numériques (S_1 , S_2) se rapprochent des résultats de Rostami et Mortazavi principalement en ce qui concerne l'intensité de la décroissance. En outre, dans la zone de régime établi, l'accroissement du gradient pariétal est proportionnel à $Re^{0.97}$, soit pratiquement proportionnel au nombre de Reynolds.

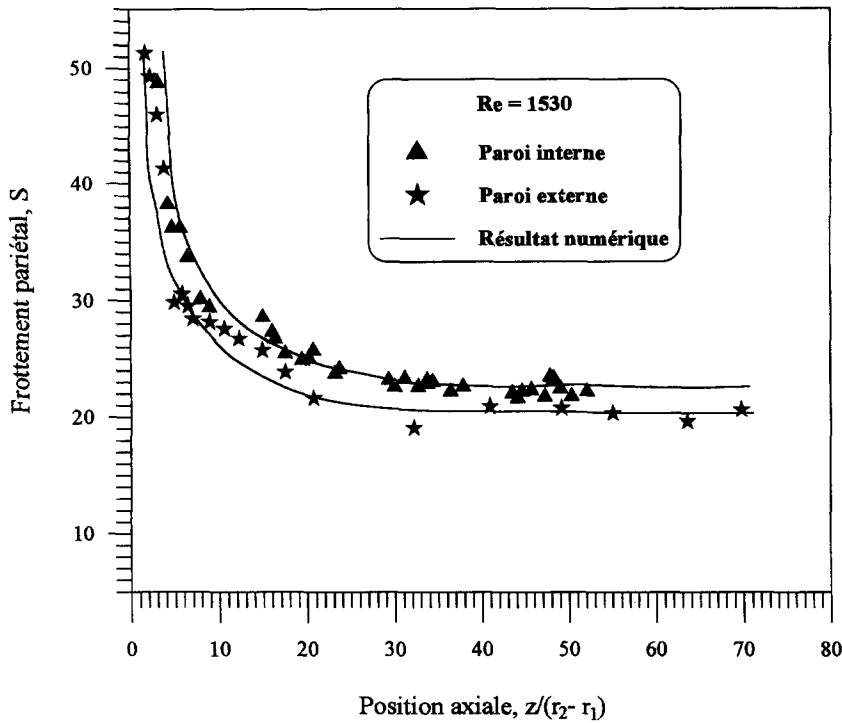


Fig. 7. Comparaison des coefficients de frottement déterminés sur les cylindres intérieur et extérieur.

Profil de vitesse complet

L'étude expérimentale vélocimétrique a permis de relever les valeurs de la vitesse dans l'espace annulaire. Les mesures deviennent cependant imprécises dans la zone située à environ 1 mm des parois. Aussi, dans les zones pariétales, les vitesses sont déduites des mesures des gradients pariétaux de vitesse obtenues à l'aide de la méthode polarographique. La combinaison de ces deux techniques expérimentales conduit donc à un profil de vitesse expérimental relativement précis dans tout l'espace annulaire (Fig. 8), et qui s'identifie approximativement au profil calculé numériquement.

Longueurs d'entrée

La longueur d'entrée hydrodynamique est définie par la position axiale à laquelle le profil de la vitesse axiale admet un extremum dont la valeur s'identifie à 99% de celle du régime établi. La composante radiale de la vitesse est alors nulle. La longueur dynamique peut être aussi déduite à partir de l'évolution du frottement local pariétal, quand ce dernier atteint 99% de la valeur constante du régime établi, S_∞ . Les résultats des deux méthodes expérimentales, polarographie et vélocimétrie, sont comparés à ceux de l'étude numérique aux différences-finies (Fig. 9). Dans cette dernière étude, la longueur d'entrée adimensionnelle est égale à :

$$\frac{z_e}{r_2 - r_1} = \begin{cases} 2.10 \times 10^{-2} Re & \text{cas d'un profil initial plat} \\ 2.68 \times 10^{-2} Re & \text{cas d'un profil initial réel.} \end{cases} \quad (21)$$

La longueur d'entrée est proportionnelle à Re . Sur la Fig. 9, nous avons reporté les résultats de Terhmina et Mojtabi [22] obtenus numériquement dans le cas d'un espace annulaire. Les résultats obtenus avec la méthode polarographique sont en accord avec ceux déterminés numériquement, mais ils sont légèrement supérieurs à ceux de Terhmina et Mojtabi [22]. Les résultats issus des mesures vélocimétriques sont plus éloignés. Cependant, il faut souligner l'imprécision de la détermination expérimentale de la longueur d'entrée, liée au fait que le profil de vitesse tend asymptotiquement vers le profil établi de forme parabolique. La longueur d'entrée diffusionnelle est définie par la position axiale pour laquelle le coefficient local de transfert de matière atteint la valeur constante du régime diffusionnel établi ; soit encore, lorsque la distribution de la concentration tend asymptotiquement vers le profil de diffusion pure :

$$C_\infty = \left(\frac{-1}{\log N} \right) \log R + 1. \quad (22)$$

Le cylindre interne étant activé, le transfert de matière adimensionnel, K , atteint donc la valeur constante, $K_\infty = 4.2279$ en régime diffusionnel établi. La longueur d'entrée est obtenue quand le transfert de matière se rapproche de K_∞ à 10^{-3} près, d'où :

$$\frac{z_D}{r_2 - r_1} = \begin{cases} 3.38 Re & \text{profil initial plat} \\ 3.19 Re & \text{profil initial réel.} \end{cases} \quad (23)$$

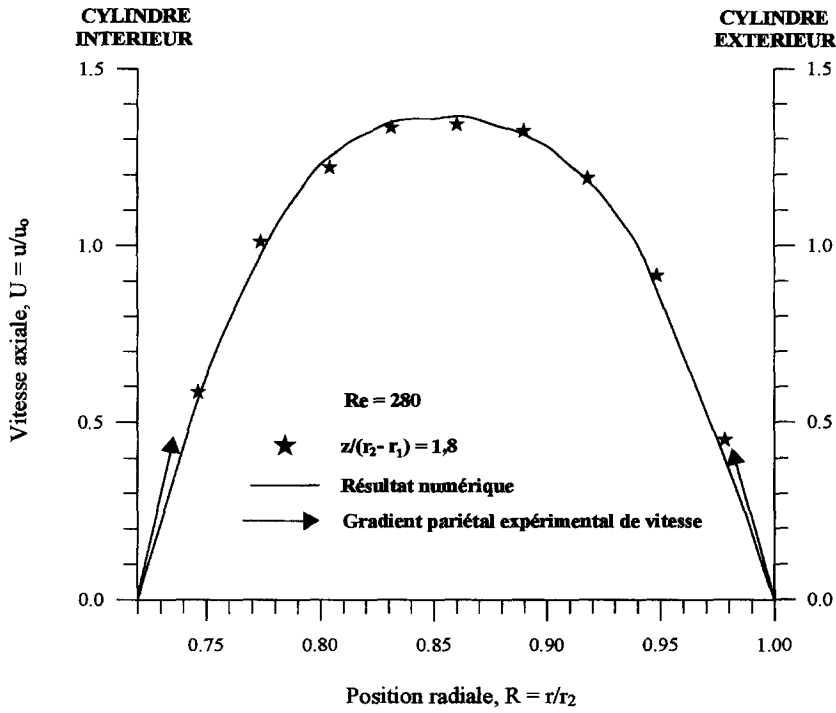


Fig. 8. Détermination d'un profil de vitesse axiale complet à partir de la vélocimétrie laser et de la méthode électrochimique.

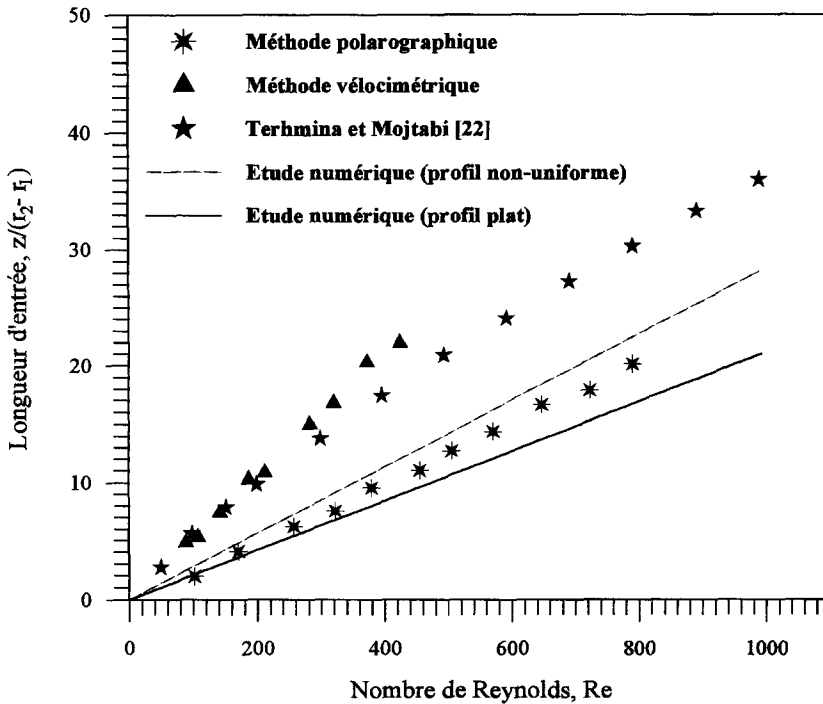


Fig. 9. Evolution de la longueur d'entrée avec le nombre de Reynolds—comparaison des résultats.

La longueur d'entrée diffusionnelle dépend de la longueur d'entrée hydrodynamique. La viscosité cinématique ν étant supérieure au coefficient de diffusion D , la couche limite hydrodynamique, à une cote z

donnée, est plus épaisse que la couche limite diffusionnelle. Par suite, la longueur d'entrée diffusionnelle est plus importante que la longueur d'entrée dynamique. D'après les équations (21) et

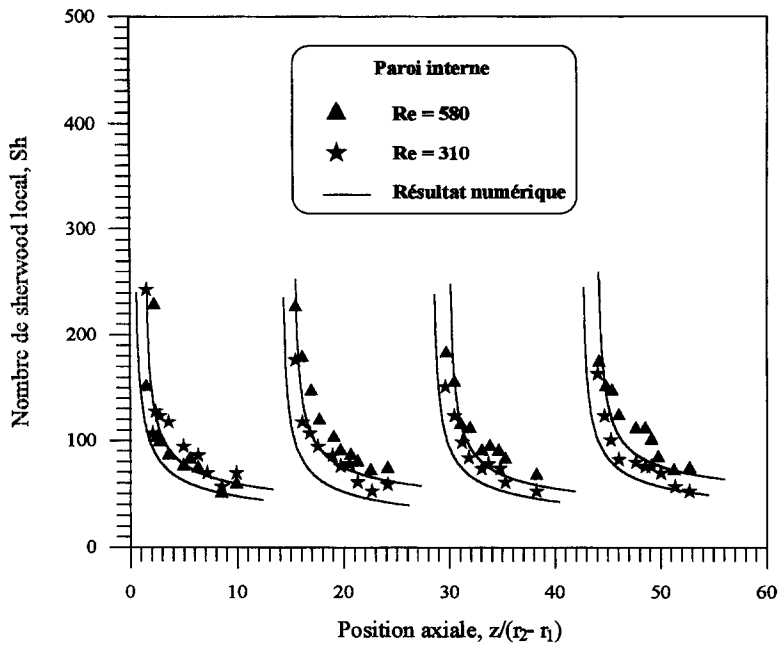


Fig. 10. Variation du transfert de matière local en fonction de la position axiale des microélectrodes.

(23), les longueurs d'entrée augmentent, pour un rapport des rayons fixé, avec les valeurs croissantes de l'épaisseur de l'espace annulaire. D'autre part, d'après l'étude numérique, la longueur d'entrée dynamique augmente avec le nombre de Reynolds et diminue avec N . La longueur d'entrée hydrodynamique a une influence évidente sur les valeurs prises par la longueur d'entrée diffusionnelle, donc sur l'évolution du transfert de matière. Ce dernier est d'autant amélioré que la longueur d'entrée hydrodynamique est grande.

Coefficients locaux de transfert de matière

L'étude numérique pour les deux types de conditions d'entrée a permis de déterminer les profils de concentration adimensionnelle. Les coefficients locaux de transfert de matière pariétaux sont alors déduits de ces profils de concentration et sont évalués en fonction du nombre de Reynolds, du nombre de Schmidt et du rapport des rayons.

L'étude expérimentale, utilisant la méthode polarographique, conduit au coefficient local de transfert de matière, au niveau de la paroi interne de la veine de mesure.

La Fig. 10 reproduit l'évolution du transfert de matière local le long de la conduite. Les prédictions de l'étude numérique (les lignes continues correspondent aux conditions d'entrée non-uniforme) sont bien vérifiées par les résultats expérimentaux. Ce résultat permet de confirmer l'hypothèse négligeant la vitesse radiale dans la résolution numérique. Il faut souligner que

la zone de transfert ne débute pas systématiquement à la position axiale $z = 0$ (entrée de la conduite). En effet, d'après le dispositif expérimental décrit antérieurement (Fig. 2), les microsondes se situent le long d'un tube de 10 cm de longueur, qui est déplacé dans l'espace annulaire. De cette manière, le début de la surface de transfert se situe à une position axiale z_0 qui vaut, respectivement, 0,5, 10,5, 20,5 et 30,5 cm, ce qui définit quatre zones de transfert. Dans chacune de ces zones, nous constatons (Fig. 10) que le transfert de matière local augmente avec le nombre de Reynolds et qu'il décroît avec les valeurs croissantes de la coordonnée axiale z pour Re donné. En outre, l'étude numérique a permis d'établir l'influence des paramètres Re , Sc , et N sur le coefficient local de transfert de matière (ou nombre de Sherwood). Dans les mêmes conditions opératoires, le transfert de matière local évalué le long de la paroi interne K_1 reste supérieur à celui évalué le long de la paroi externe K_2 (Fig. 11). Cette différence est liée à l'évolution des couches limites. L'épaisseur de la couche limite interne est toujours inférieure à celle de la couche limite externe. L'écart entre les coefficients de transfert de matière K_1 et K_2 diminue quand le rapport des rayons N croît. A la limite, lorsque $N = 1$ (plaques planes parallèles), les épaisseurs des couches limites deviennent identiques et les coefficients de transfert égaux.

Nous avons déterminé des équations de corrélation donnant le nombre de Sherwood local en fonction des différents paramètres de l'étude. Les corrélations sont données pour le régime non-établi hydrodynamiquement et pour le régime établi ($N = 0.72$).

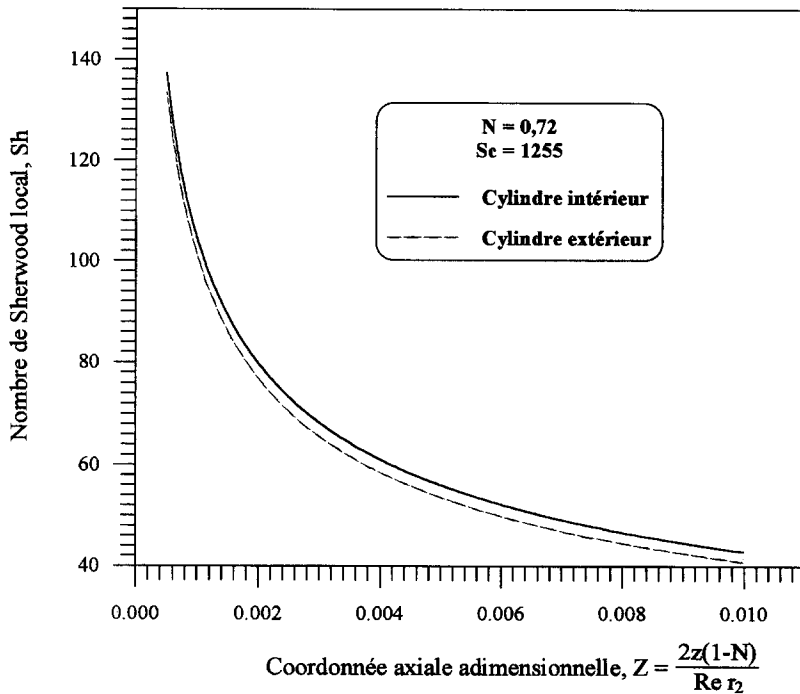


Fig. 11. Comparaison du transfert de matière obtenu sur les cylindres intérieur et extérieur.

$$Sh = \begin{cases} 0.44 [Re d_h \phi / (z - z_0)]^{0.52} Sc^{1/3}, & Z \leq 42 \times 10^{-4} \\ 1.04 [Re d_h \phi / (z - z_0)]^{0.34} Sc^{1/3}, & Z \geq 42 \times 10^{-4} \end{cases} \quad (24)$$

où ϕ est défini par [4] :

$$\phi = \frac{2 \left[-2N^2 + \frac{1-N^2}{\ln(1/N)} \right] \left[\frac{1-N}{N} \right]}{1+N^2 - \frac{1-N^2}{\ln(1/N)}}$$

$Z = 42 \times 10^{-4}$ est équivalent à $Re d_h \phi / (z - z_0) = 119$, ou à $Re d_h / (z - z_0) = 74.7$.

L'expression du nombre de Sherwood local, en régime hydrodynamique établi, s'identifie à celui obtenu par Turitto [4] :

$$Sh = 1.076 Sc^{1/3} [Re d_h \phi / (z - z_0)]^{1/3}. \quad (25)$$

La corrélation donnant l'évolution du nombre de Sherwood local est comparée à celle établie par Molki *et al.* [11] :

$$Sh = 5.21 + 0.45 [Re Sc d_h / (z - z_0)]^{0.45} \quad (26)$$

à partir des résultats obtenus avec des techniques de sublimation.

Ces auteurs proposent aussi une analogie entre les transferts de chaleur et de masse. Ils peuvent ainsi déduire le transfert de matière à partir du transfert de chaleur et réciproquement. Nous avons donc déterminé le nombre de Sherwood local à partir des valeurs du nombre de Nusselt local établies par Coney et El-

Shaarawi [23] et Payne *et al.* [24], en utilisant l'analogie proposée par Molki *et al.* [11] :

$$Sh = Nu \left(\frac{Sc}{Pr} \right)^{1/3}. \quad (27)$$

La comparaison de ces divers résultats montre un bon accord (Fig. 12). Le résultat numérique du présent travail se confond avec celui donné par la littérature en régime hydrodynamique établi [équation (25)].

L'évolution du nombre de Sherwood moyen, \overline{Sh} , est déduite des valeurs du nombre de Sherwood local par intégration :

$$\overline{Sh} = \frac{\int_{z_0}^z Sh(z) dz}{\int_{z_0}^z dz}. \quad (28)$$

On obtient :

$$\overline{Sh} = \begin{cases} 0.66 Sc^{1/3} [Re d_h \phi / (z - z_0)]^{0.52}, & Z \leq 42 \times 10^{-4} \\ 1.56 Sc^{1/3} [Re d_h \phi / (z - z_0)]^{0.34}, & Z \geq 42 \times 10^{-4}. \end{cases} \quad (29)$$

Les corrélations sont portées sur la Fig. 13, avec les résultats expérimentaux. Nous avons comparé nos résultats avec l'équation établie par Pickett [9] et avec celle de Qi et Savinell [10] :

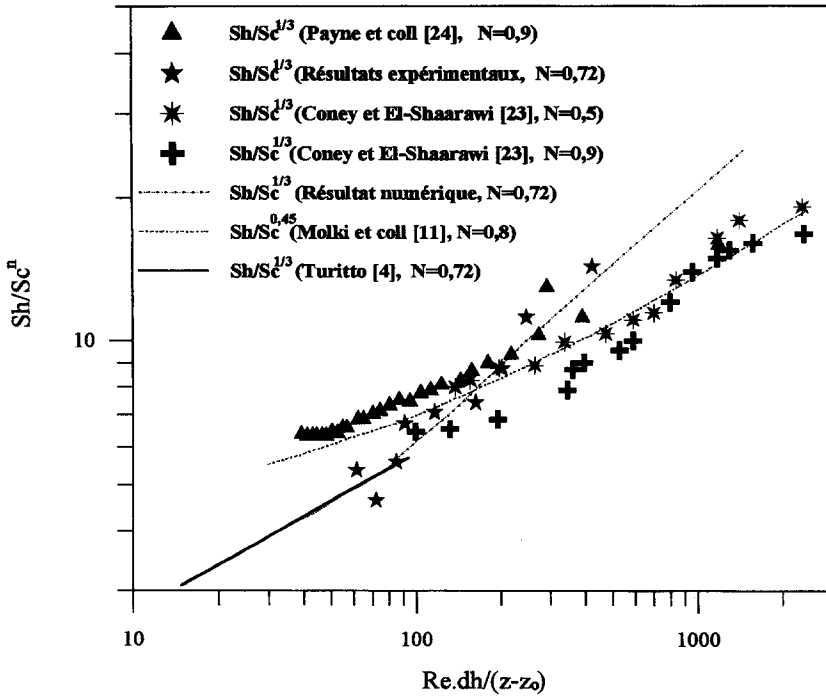


Fig. 12. Variation du nombre de Sherwood local—comparaison avec les résultats de la littérature.

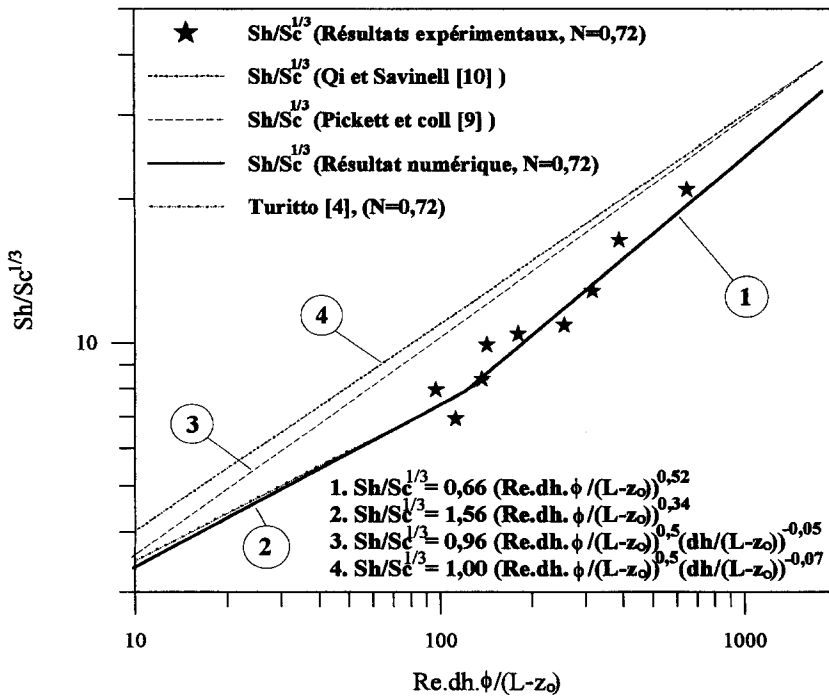


Fig. 13. Evolution du nombre de Sherwood moyen.

$$\overline{Sh} = 0.96 Sc^{1/3} \left(\frac{Re d_h}{L-z_0} \right)^{0.5} \times \left(\frac{d_h}{L-z_0} \right)^{-0.05}, \text{ d'après réf. [9]} \quad (31)$$

$$\overline{Sh} = 1.00 Sc^{1/3} \left(\frac{Re d_h}{L-z_0} \right)^{0.5} \times \left(\frac{d_h}{L-z_0} \right)^{-0.07}, \text{ d'après réf. [10].} \quad (32)$$

Les relations (31) et (32) ont été établies expérimentalement le long d'une paroi d'un canal rectangulaire en mettant en oeuvre une méthode électrochimique. La Fig. 13 montre que ces différentes corrélations peuvent être retenues pour décrire le transfert de matière le long des parois. La légère différence avec nos résultats proviendrait de la différence entre rapports de rayons ($N = 0.72$ dans notre cas, et $N = 1$ pour ces auteurs). Dans la région hydrodynamiquement établie, la corrélation (30) s'accorde parfaitement avec celle trouvée dans la littérature :

$$\overline{Sh} = 1.614 Sc^{1/3} [Re d_h \phi / (z - z_0)]^{1/3}. \quad (33)$$

CONCLUSION

Le problème du transfert de matière local, dans un écoulement annulaire axisymétrique, en régime non établi a été résolu par une méthode numérique aux différences-finies. Deux profils de vitesse, à l'entrée de la conduite, sont considérés : l'un uniforme, l'autre réel (correspondant aux conditions expérimentales en sortie d'un milieu poreux).

Les prédictions de l'étude numérique (frottement, longueur d'entrée et transfert de matière) obtenues à l'aide d'une condition d'entrée uniforme restent légèrement inférieures à celles trouvées à l'aide d'un profil initial réel. Ces dernières sont confirmées par les résultats expérimentaux, obtenus en mettant en oeuvre une méthode électrochimique et la vélocimétrie laser. L'évolution du coefficient de transfert de matière obéit à une loi de puissance. Lorsque le régime dynamique est supposé établi dès l'entrée de la conduite, l'intensité du transfert de matière est faible comparé au cas où le régime dynamique n'est pas établi. Pour augmenter l'intensité du transfert, il est donc intéressant de rechercher des systèmes d'entrée pour lesquels la longueur d'établissement du régime hydrodynamique est importante.

Remerciements—Les auteurs remercient les autorités franco-algériennes qui supportent financièrement la coopération entre les deux laboratoires d'abord sous la forme d'une convention d'échange CNRS-DPRS et actuellement dans le cadre d'un programme inter-Universitaire du CMEP.

REFERENCES

1. C. S. Lin, E. B. Denton, H. S. Gaskill and G. L. Putnam, Diffusion-controlled electrode reactions, *Ind. Engng Chem.* **43**, 2136–2143 (1951).
2. D. C. Carbin and D. R. Gabe, Electrochemical mass transfer in an annulus, *Electrochim. Acta* **19**, 653–654 (1974).
3. T. K. Ross and A. A. Wragg, Electrochemical mass transfer studies in annuli, *Electrochim. Acta* **10**, 1093–1106 (1965).
4. V. T. Turitto, Mass transfer in annuli under conditions of laminar flow, *Chem. Engng Sci.* **30**, 503–509 (1975).
5. E. M. Sparrow and S. H. Lin, The developing laminar flow and pressure drop in the entrance region of annular ducts, *J. Basic Engng* **12**, 827–834 (1964).
6. S. C. Gupta and V. K. Garg, Developing flow in concentric annulus, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng* **28**, 27–35 (1981).
7. K. C. Cheng and K. N. Astill, Momentum integral solution developing flow in an annulus with a rotating inner cylinder, *Trans. ASME J. Fluids Engng* **558**–559 (1976).
8. C. Tiu and S. Battacharya, Flow behaviour of power-law fluids in the entrance region of annuli, *Can. J. Chem. Engng* **51**, 47–53 (1973).
9. D. J. Pickett, *Electrochemical Reactor Design*, pp. 121–170. Elsevier, Amsterdam (1979).
10. J. Qi and R. F. Savinell, Mass transfer in a laminar-flow parallel plate electrolytic cell with simultaneous development of velocity and concentration boundary layers, *J. Appl. Electrochem.* **20**, 885–892 (1990).
11. M. Molki, K. N. Astill and E. Leal, Convective heat-mass transfer in the entrance region of a concentric annulus having a rotating inner cylinder, *Int. J. Heat Fluid Flow* **11**, 120–128 (1990).
12. M. Ould-Rouis, C. Nouar, A. Salem, J. Legrand and P. Legentilhomme, Hydrodynamics and mass transfer of the laminar flow in the entrance region of an annular electrochemical reactor, *Inst. Chem. Engrs Symp. Ser.* **12**, 17–28 (1989).
13. D. Vortmeyer and J. Schuster, Evaluation of steady flow profiles in rectangular and circular packed beds by a variational method, *Chem. Engng Sci.* **38**, 1691–1699 (1983).
14. S. M. White and C. L. Tien, Analysis of flow channeling near the walls in packed beds, *Wärme Stoffübertragung* **21**, 291–296 (1987).
15. P. Cheng and C. T. Hsu, Fully developed forced convective flow through an annular packed-sphere bed with wall effects, *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, 1843–1853 (1986).
16. M. A. I. El-Shaarawi and A. Sarhan, Combined forced-free laminar convection in the entry region of a vertical annulus with a rotating inner cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 175–186 (1982).
17. J. E. R. Coney and M. A. I. El-Shaarawi, Finite difference analysis for laminar flow heat transfer in concentric annuli with simultaneously developing hydrodynamic and thermal boundary layers, *Int. J. Num. Meth. Engng* **9**, 17–38 (1975).
18. P. Legentilhomme et J. Legrand, Modélisation numérique du transfert de matière dans un écoulement annulaire faiblement tourbillonnaire non entretenu, *Can. J. Chem. Engng* **71**, 299–311 (1993).
19. F. Coeuret et A. Storck, *Eléments de Génie Electrochimique*, pp. 91–128. Ed. Lavoisier, Paris (1993).
20. L. P. Reiss and T. J. Hanratty, An experimental study of the unsteady nature of the viscous sublayer, *A.I.Ch.E. J.* **9**, 154–160 (1963).
21. A. A. Rostami and S. S. Mortazavi, Analytical prediction of Nusselt number in a simultaneously developing laminar flow between parallel plates, *Int. J. Heat Fluid Flow* **11**, 44–47 (1990).

22. O. Terhmina et A. Mojtabi, Ecoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non-établis dans un espace annulaire, *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 583–590 (1988).
23. J. E. R. Coney and M. A. I. El-Shaarawi, Laminar heat transfer in the entrance region of concentric annuli with rotating inner walls, *ASME J. Heat Transfer* **96**, 560–562 (1974).
24. A. Payne and B. W. Martin, Heat transfer in laminar flow in a concentric annulus from a rotating inner cylinder, *Proceedings of the 5th International Heat Transfer Conference*, Tokyo, pp. 80–84 (1974).

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF MASS AND MOMENTUM TRANSFER IN DEVELOPING LAMINAR FLOW IN ANNULUS

Abstract—The hydrodynamic characteristics and the mass transfer were determined in the entrance region of an annulus with simultaneous development of velocity and concentration fields. A finite difference method was carried out to solve the problem by using the boundary layer assumptions. Two kinds of boundary conditions at the entrance were considered: uniform axial velocity and axial velocity at the exit of a porous media, which corresponds to experimental conditions. The velocity profiles at different axial locations were determined by laser Doppler velocimetry for different values of the Reynolds number. The wall shear stresses and the local mass transfer coefficients were obtained on microelectrodes by performing a polarographic method. The numerical predictions are in a good agreement with the experimental data.